林分シミュレーションに対する生長モデルの研究 （II）

——ワイブル分布のあてはめについて——

九州大学農学部　西 沢 正 久
木 梨 謙 吉
長 正 道

1. ワイブル（Weibull）分布

x を胸高直径，b，c を定数とすれば確率密度関数 $f(x)$ は次式で表わされる。

$$f(x)=(c/b)(x/b)^{c-1}exp\{-(x/b)^c\},\quad (x\geqq 0,\ b>0,\ c>0) \quad \cdots\cdot(1)$$

b は尺度の母数，c は形の母数と呼ばれる。これを一般型で表わすと次のようになる。

$$g(y)=(c/b)\{(y-a)/b\}^{c-1}\,exp[-\{(y-a)/b\}^c],\quad (y\geqq a,\ b>0,\ c>0) \quad \cdots\cdot(2)$$

ここに a は位置の母数と呼ばれ，$y=x+a$ で(1)と(2)は関係づけられており，$a\geqq 0$ で a より小さい直径の木は存在しないことを表わす。

$c<1$ は逆J字型曲線，$c=1$ のときは

$$f(x)=(1/b)\,exp\,(-x/b),\ (x\geqq 0,\ b>0) \cdot\cdot(3)$$

となり指数曲線を表わす。$1<c<3.6$ では密度関数は山型で正の歪をもつ。$c=2$ では χ^2 分布の特別な場合で Rayleigh の分布を示し，$c\fallingdotseq 3.6$ では正規分布となる。$c>3.6$ では負の歪がひどくなり，$c\to\infty$ では単一点上のスパイクとなる。$c\leqq 1$ では陰樹の異齢林によく表われる分布を示す。このようにワイブル分布は c の値によってあらゆる形の分布にも適合することがわかる。$F(x)$ をワイブル分布の累積分布関数とすると

$$F(x)=1-exp\ \{-(x/b)^c\} \quad \cdots\cdot(4)$$

であることが(1)を 0 から x まで積分することによって導かれ，(4)を x について解くと

$$x=b[-l_n\{1-F(x)\}]^{1/c} \quad \cdots\cdot(5)$$

が得られる。ここに l_n は自然対数を表わす。(4)式で $x=b>0$ とおくと $F(b)=1-exp\ \{-(b/b)^c\}=1-e^{-1}\fallingdotseq 0.63$ となり，b より小さい直径の木が全林木の63%あることを示しており，後述のようにこれを用いて b の推定を行なうことができるが最良な推定法ではない。

2. 母数の推定

（方法1）y_i を胸高直径，a を最小直径，$x_i=y_i-a$ とし f_i を x_i に属する本数とすると，$\bar{x}=\Sigma f_ix_i/\Sigma f_i$，$S=\sqrt{\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2/\Sigma f_i}$ を計算し，変動係数 $CV=S/\bar{x}$ を求めると，日本規格協会，統計数値表の F3.1 の表を用いて CV から c を求めることができる。（数表 F3.1 では c が m になっていることに注意）。b を推定するには，x_i の自然対数の値 $X_i=l_nx_i$ をもとにして $\bar{X}=\Sigma f_iX_i/\Sigma f_i$，$S_M=\sqrt{f_i(X_i-\bar{X})^2/\Sigma f_i}$ を計算し

$$\hat{X}(0.63)=\bar{X}+0.44556\ S_M \quad \cdots\cdot(6)$$

を求めて

$$\hat{x}(0.63)=e^{\hat{X}(0.63)}\fallingdotseq b \quad \cdots\cdot(7)$$

として尺度の母数 b が推定できる。

（方法2）$r=0.17$ としたとき $\hat{X}(0.17)=\bar{X}-0.86002S_M$ から $x_r=e^{\hat{X}(0.17)}$ および $t=0.97$ としたとき $\hat{X}(0.97)=\bar{X}+1.42829S_M$ から $x_t=e^{\hat{X}(0.97)}$ を計算すると，一般に次式から c および b の推定値が計算できる。

$$\hat{c}=l_n\{l_n(1-r)/l_n(1-t)\}/l_n(x_r/x_t) \quad \cdots\cdot(8)$$

$$\hat{b}=exp\left[\frac{l_n(x_r)-l_n(x_t)l_n\{-l_n(1-r)\}/l_n\{-l_n(1-t)\}}{1-l_n\{-l_n(1-r)\}/l_n\{-l_n(1-t)\}}\right] \quad \cdots\cdot(9)$$

したがって，この場合は

$$\hat{c}=-2.9349/l_n(x_r/x_t) \quad \cdots\cdot(10)$$

$$\hat{b}=exp\left\{\frac{l_n(x_r)-1.3392l_n(x_t)}{2.3392}\right\} \quad \cdots\cdot(11)$$

（方法3）$r=0.40$ とするとき $\hat{X}(0.40)=\bar{X}-0.07369\ S_M$ から $x_r=e^{\hat{X}(0.40)}$ および $t=0.82$ のときの $\hat{X}(0.82)=\bar{X}+0.87054S_M$ から $x_t=e^{\hat{X}(0.82)}$ を計算すると，(8)，(9)から方法2と同様にして

$$\hat{c}=-1.2110/l_n(x_r/x_t) \quad \cdots\cdot(12)$$

$$\hat{b}=exp\left\{\frac{l_n(x_r)+1.2456l_n(x_t)}{2.2456}\right\} \quad \cdots\cdot(13)$$

（方法4）c が既知の場合は次式を用いて b の推定値を求めることができる。

$$\hat{b}=exp[l_n(_{0\cdot 80})-l_n\{-l_n(0.20)\}/c]$$
$$=exp\{l_n(x_{0\cdot 80})-0.4759/c\} \quad \cdots\cdot(14)$$

ここに $x_{0\cdot 80}=e^{X(0\cdot 80)}$，ただし $X(0.80)=\bar{X}+0.82110\ S_M$

（方法5）最尤法と呼ばれる最良な推定量を与える方法で，まず方法(1)を用いて $\hat{c}$ を求め，直径分布から $A=\Sigma f_ix_i^{\hat{c}}\ l_n(x_i)$，$B=\Sigma f_ix_i^{\hat{c}}$，$\bar{X}=\Sigma f_iX_i/\Sigma f_i$（ただし $X_i=l_nx_i$）を計算して $D=(A/B)-1/\hat{c}$ と $\bar{X}$ が等しくなるような c の値を反復法により求め，この値を c^* とすると

$\hat{b}=(\sum f x_i^{c^*}/\sum f_i)^{1/c^*}$ ····(15)

により b の最良推定値を求めることができる。

以上の計算は関数型がくみこまれた卓上電子計算機で容易に実行できる。またこのようにして a, b, c がわかった場合(1)または(2)式で理論分布を計算する時には右辺に直径級の幅を乗ずることを忘れてはならない。

3. 実際例

九大粕屋演習林16林班ろ小班35年生ヒノキ林に1949年に設定された $20m\times30m=0.06ha$ の固定プロットの直径分布は表1の通りであった。ここに $a=11$ である。

表1 直径階別本数表

胸高直径(y_i)	12	14	16	18	20	22	24	計
$x_i=y_i-11$	1	3	5	7	9	11	13	
本数 (f_i)	15	16	26	24	18	9	4	112

(方法1) $\overline{X}=(1\times15+3\times16+\cdots+13\times4)/112=6.02$, $S=\sqrt{(1^2\times15+3^2\times16+\cdots+13^2\times4)/112-6.02^2}=3.20$ であるから $CV=3.20/6.02=0.53$, 統計数値表のF3.1表から $CV=0.53$ に応ずる m の値は 1.9695 であるから $\hat{c}=2.0$。次に $X_i=l_n x_i$ に応ずる本数表を作ると表2のようになる。

表2 X_i に応ずる本数表

$X_i=l_n x_i$	0	1.10	1.61	1.95	2.20	2.40	2.56	計
f_i	15	16	26	24	18	9	4	112

表2から $\overline{X}=(0\times15+1.10\times16+\cdots+2.56\times4)/112\doteqdot1.59$, $S_M=\sqrt{(0^2\times15+1.10^2\times16+\cdots+2.56^2\times4)/112-1.59^2}=0.73$,

(6)式より $\hat{X}(0.63)=1.59+0.44556\times0.73=1.92$,

(7)式より $\hat{x}(0.63)=e^{1.92}\doteqdot6.8=\hat{b}$

(方法2) $\hat{X}(0.17)=1.59-0.86002\times0.73=0.96$ から $x_r=e^{0.96}=2.62$, $\hat{X}(0.97)=1.59+1.42829\times0.73=2.63$ から $x_l=e^{2.63}=13.91$, したがって(10), (11)から $\hat{c}=-2.9349/l_n(2.62/13.91)=1.8$,

$\hat{b}=exp\{(l_n2.62+1.3392l_n13.91)/2.3392\}=6.8$

(方法3) $\hat{X}(0.40)=1.59-0.07369\times0.73=1.54$ から $x_r=e^{1.54}=4.66$, $\hat{X}(0.82)=1.59+0.87054\times0.73=2.23$ から $x_l=e^{2.23}=9.30$, したがって(12), (13)から $\hat{c}=-1.2110/l_n(4.66/9.30)=1.8$,

$\hat{b}=exp\{(l_n4.66+1.2456l_n9.30)/2.2456\}=6.8$

(方法4) $c=1.8$ とする。$X(0.80)=1.59+0.82110\times0.73=2.19$ から $x_{0.80}=e^{2.19}=8.94$,

したがって(14)から $\hat{b}=exp(l_n8.94-0.4759/1.8)=6.9$

(方法5) $c=1.9$ を中心に2.0と1.8の3つの c の値に対して D と $\overline{X}$ がほぼ等しいところの c を表3のようにして求める。

表3 c^* を求めるための反復法

c	2.0	1.9	1.8
A	11041.49	8883.90	7154.81
B	5208.00	4215.71	3416.96
D	1.6201	1.5818	1.5384
$\overline{X}$	1.5850	1.5850	1.5850
$D-\overline{X}$	0.0351	−0.0040	−0.0466

$(D-\overline{X})$ の一番小さい場合の c を c^* とする。すなわち $c^*=1.9$, したがって(15)より

$\hat{b}=(4215.71/112)^{1/1.9}=6.7$

以上の計算結果から(方法5)の母数の値 $a=11$, $b=6.7$, $c=1.9$ を用いて(2)式から

$$g(y_i)=2\times(1.9/6.7)\times\{(y_i-11)/6.7\}^{0.9}\, exp\,[-\{(y_i-11)/6.7\}^{1.9}]$$

が確率密度となり, 表4のようにして理論分布が計算される。

補正 $g(y_i)$ は $\sum g(y_i)=1$ となるように $g(y_i)$ に $1/0.9926=1.0075$ 倍した値である。$\hat{f}_i$ と表1の f_i と比較すると適合がよいことがわかる。

表4 理論分布の計算

y_i	12	14	16	18	20	22	24	計
$g(y_i)$	0.0997	0.2215	0.2456	0.1990	0.1283	0.0682	0.0304	0.9926
補正 $g(y_i)$	0.1004	0.2232	0.2474	0.2005	0.1293	0.0687	0.0305	1.0000
$\hat{f}_i=112\times$補正$g(y_i)$	11	25	28	23	14	8	3	112