森林調査におけるベイジアン推定論の応用について（Ⅱ）

九州大学農学部　野　上　啓一郎
西　沢　正　久

1．まえがき

第1報[1]でベイジアン点推定論について報告したが理論的には不十分なものであった。したがって本報では，これに理論的な説明を加え，具体例としてポイントサンプリングによる資料を用いてのha当り断面積，ha当り材積，ha当り本数の点推定をとりあげる。

2．資　　料

大分県九州林産（株）平家山林スギ57年生，2haの立木位置図上にランダムに点をおとし，各点で断面積定数4のポイントサンプリングを行なうものとし，その結果得られたha当り断面積（G），ha当り材積（V），ha当り本数（N）の数値，ならびに毎木調査資料である。

3．ベイジアン点推定理論

第1報で，ベイジアン点推定値E（θ/x）は次式で与えられることを示した。

$$E(\theta/x)=\int\theta f(x/\theta)\,p_o(\theta)d\theta\Big/\int f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta=\Phi_B(x) \qquad (1)$$

ただしここに θ：母集団パラメーター，x：観測値ベクトル，$f(x/\theta)$：尤度関数，$p_o(\theta)$事前分布である。

ここで（1）式が成立することを証明してみよう。まず損失関数 $R(\phi,\theta)$ を次式で定義する。

$$R(\phi,\theta)=\sum_x\{\phi(x)-\theta\}^2\cdot f(x/\theta)$$

ここに $\{\phi(x)-\theta\}^2$ は二乗誤差である。そのとき事前分布$p_o(\theta)$に関する平均損失E〔R（ϕ,θ）〕は次のようにあらわされる。

$$E[R(\phi,\theta)]=\int R(\phi,\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta$$
$$=\int\sum_x\{\phi(x)-\theta\}^2 f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta \qquad (2)$$

さてベイズ点推定量$\phi_B(x)$は一般に，（2）を最小にするようなϕとして定義される。ここでϕ'を任意の点推定量としよう。このときE〔R（ϕ',θ）〕は期待損失関数の標準型により次のようになる。

$$E[R(\phi',\theta)]=E[R(\phi,\theta)]+\sum_x\int\{\phi'(x)-\phi_B(x)\}^2 f(x/\theta)p_o(\theta)\,d\theta+2\sum_x\int\{\phi'(x)-\phi_B(x)\}\cdot\{\phi_B(x)-\theta\}f(x/\theta)\,p_o(\theta)d\theta \qquad (3)$$

さて$E[R(\phi',\theta)]\geqq E[R(\phi,\theta)]$

となるには，（3）式の第3項を恒等的に0とおけばよいことがわかる。すなわち

$$\int\{\phi_B(x)-\theta\}f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta=0$$

順次変型して

$$\int\phi_B(x)f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta-\int\theta\cdot f(x/\theta)\cdot p_o(\theta)\,d\theta=0$$

$$\therefore\phi_B(x)=\int\theta f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta\Big/\int f(x/\theta)\,p_o(\theta)\,d\theta$$

上式はまさに（1）式に等しい，以上でベイジアン点推定値が（1）式で与えられることが証明された。

さてベイジアン推定論では事前分布$p_o(\theta)$の誘導が問題となることは第1報でも述べた。Ek[2]らは保存的経験事前分布と修正経験事前分布という2つの概念を導入している。本報では前者・すなわち保存的経験事前分布に相当するTeichner[3]の方法に順ずることにする。これはいわゆる　有限値関数による事前分布の近似法である。この方法を用いていろいろな確率分布を表現することは，確率論では多く見受けられる。本研究でも有限値関数を用いた理由は，主として次のことからである。すなわち，通常（1）式によってベイズ解を求めることは非常に困難な場合が少なくない。

つまり共役分布族に属する分布族間では容易であろうが，そうでない場合一本研究もそうであるー，ベイズ解を解析的に導びくことは不可能に近い，そこで確率分布において，それをグラフ化し　その横軸を任意の区間に分解（本研究では 200）し，その各区間における縦軸の値を順次求めその値を平滑化するという方法が最も簡単でかつ適切であろうと考えたからである。

なお本研究で採用した尤度関数は平均μと分散Σをもつ正規分布である。ここにμとΣは観測値から計算される。また事前分布としては，β分布とγ分布の2つであり各々次式の密度関数をもっている。

$$p(x)=x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}/B(\nu,\omega) \qquad (4)$$

ここに$B(\nu,\omega)=\int_0^1 u^{\nu-1}(1-u)^{\omega-1}du$

$$p(x)=(x/b)^{c-1}[\exp(-x/b)/b]\,\gamma(c) \qquad (5)$$

ここに$\gamma(c)=\int_0^\infty exp(-u)u^{c-1}\,du$

以上がTeichner の方法である。次にこの方法を用い

て具体的な計算を行なってみる。

4．計算手順

本研究では九州大学大型計算機センターＦＡＣＯＭ OSⅥを用いて，1つの主プログラムと5つの副プログラムを作製し使用した。以下各プログラムの説明を簡単に述べる。

- 主プログラム：観測値数Nと観測値 x_1, $\cdots x_n$ の入力で平均μ と分散Σ を計算し，副プログラムＣＯＮＰＲＩをＣＡＬＬ。
- 副プログラム
  ＣＯＮＰＲＩ：副プログラムＢＥＴＡもしくはＧＡＭＭＡをＣＡＬＬしそれによって作られた密度関数を有限値関数で近似する。また必要に応じて，事前・事後分布をラインプリンタへ図化する副プログラムＧＲＡＰＨをＣＡＬＬすることもできる。次に副プログラムＳＥＫＩＢＮをＣＡＬＬし，（１）式を計算し主プログラムに戻ってその解を印刷する。

以上計算所要時間は約7秒であった。表－1，図－1に計算結果の一部を示す。

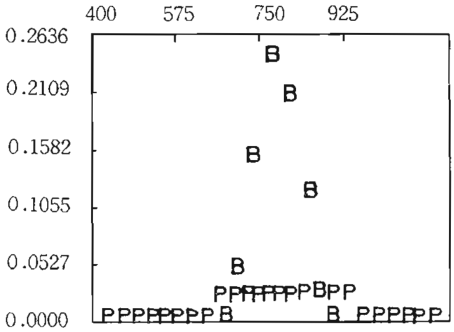
5．考　　察

ここでとりあげた計算結果での標本サイズ2個は，意識的に真値とかけ離れた値をもつ標本を含むようにしたにもかかわらず，ベイジアン推定値は真値にかなり接近している。このことはわずか標本サイズが2個であっても，ベイジアンの立場から推定を行なうことが実用的であることを暗示している。またここで標本サイズが40個の場合の結果も併記したが，これは5％の目標精度で必要な標本サイズが40個であったためだが，これと比較しても，ベイジアンアプローチが非常に少ない標本でも良い結果を与えることが推測されよう。しかしながら，ベイジアン推定を実行する際の，用いられる標本サイズに関しては未だ決定的なことはいえないが，今後，調査時間，費用の面から標本抽出法のデザインを考える際に1つのアイデアを与えるものであろうことは疑えない。これからの課題としてはまず事前分布の誘導を更に考えなくてはならないだろうし，更に精度を高めるいろいろな方法ーたとえば，事前分布の打ち切り等ーを検討することが望ましい。これらに関しては順次究明してゆく予定である。

表－1　推定結果ならびに真値との比較

		Gm²/ha		Vm³/ha		N本/ha	
po (θ)		a	b	a	b	a	b
Γ	①	70.0	76.9	806.6	1016.9	580	674
	②	77.8	77.7	1006.8	1058.4	644	642
β	①	70.0	77.8	806.6	1021.0	580	596
	②	77.8	77.8	1006.8	1062.9	644	644
真値		78.8		1010.67		674	

表中①②は各々標本サイズが2個・40個の場合，a,bは各々非ベイジアン，ベイジアンの場合の推定値である。



図－1　事前（P）・事後（Q）分布

引用文献

(1) 野上啓一郎・西沢正久：90回日林論　61－62　1979

(2) Ek ,A.R& J.N.Issos ：Bayesian Methodo－logy For Forest Inventory　p.p.16 Glen A－rbor　,Michigan　1976

(3) Teicher, H：Ann, Math ,Statist ,34 1265－1269　1963