平均直径生長と直径分布について

九州大学農学部 野 上 啓一郎
西 沢 正 久

1. はじめに

ある林分の時間的推移を表わす方法としてその林分の直径分布の遷移が考えられる。更にこの直径分布の遷移を研究するにあたっては林分の平均直径生長と単木の直径生長モデルを考えねばならない。直径生長等生物系をモデル化しようとする時，それらに関連する条件・知識等を完全にモデルに組み込むことは非常に困難である。したがってまず単純なモデルを作製し，現実の資料を使ってそのモデルの当否を確かめる時，用いられるモデルは決定論的なものよりはむしろ確率的なものが望ましい。近藤[1]は確率モデルを次のように2つに分類している。すなわち確率変数の分布モデルを取り扱ういわゆる確率分布モデルと現象が動的でかつ確率的な場合を考察する確率過程モデルである。前者に関連した直径分布の考察には，西沢ら[2]の研究があり後者に属するものとしては箕輪ら[3]や鈴木ら[4][5]の報告がある。本報は西沢が明らかにしたワイブル分布の分布関数を生長曲線に適用できるように修正したいわゆる修正ワイブル分布関数を，確率過程モデルすなわち鈴木の林分遷移の基礎方程式の解析に利用できることを示し，この鈴木の理論に若干の新しい考察を加えたものである。

2. 研究方法

鈴木は林木の平均直径の生長についてこれを定差図にプロットしてみるとそれが極めて直線に近いことを見い出し，これから林木の平均直径の生長曲線はミッチャーリッヒの曲線となり，したがって平均直径の生長速度が単分子反応速度式になることを証明している。またこれを単木の直径生長に用い，いわゆるランジュバン方程式にしたがって単木が生長しこれから林分遷移の基礎方程式を具体的に解くためのその係数の関数型を定めている。本報では幾分異なった考え方に立脚し，係数関数を誘導することを試みた。さて単木の直径生長が次式の確率的力学方程式を満足するとしよう。

$$dx/dt = f(x) + g(x)\,i(t) \qquad (1)$$

ここに x：時刻 t での直径，$f(x)$：単木の直径生長速度を与える任意の関数で微分可能なもの，$i(t)$：雑音（ランダムな環境条件等），$g(x)$：$i(t)$ の係数で微分可能な関数とする。また $i(t)$ は各々次式で与えられる2つのパラメータ μ，σ^2 によって定義されるものとする。

$$E\{i(t)\} = \mu \qquad (2)$$

$$E\{i(t)-\mu\}\{i(t+t')-\mu\} = \sigma^2\delta(t') \qquad (3)$$

ここに δ はディラックのデルタ関数である。更に $i(t)$ の3次以上の相関は0と仮定する。次に次式で定義される白色雑音 $H(t)$ を考える。

$$H(t) = \{i(t)-\mu\}/\sigma \qquad (4)$$

ここに $$E\{H(t)\} = 0 \qquad (5)$$

$$E\{H(t)H(t+t')\} = \delta(t') \qquad (6)$$

（4）式の $i(t)$ を（1）式に代入し整理すれば

$$dx/dt = \alpha(x) + \beta(x)H(t) \qquad (7)$$

ここに $$\alpha(x) = f(x) + \mu g(x) \qquad (8)$$

$\beta(x) = \sigma g(x)$ とおいた。 (9)

（7）式の両辺を $\beta(x)$ でわり，変数変換を施すと

$$dz/dt = \hat{a}(z) + H(t) \qquad (10)$$

ここに $$dz = dx/\beta(x) \qquad (11)$$

$$\hat{a}(z) = \alpha(x(z))/\beta(x(z)) \qquad (12)$$

さて林分遷移の基礎方程式の係数を $C_1(x)$，$C_2(x)$ で表わす。詳細は論文にゆずり割愛するが，それら係数の林学上の意味は次のとおりである。すなわち，$C_1(x)$ は林木の直径の平均生長率を，$C_2(x)$ は直径分散の増加率を示す関数である。問題はこれらを具体的に求めることである。ここでまず変数変換を施した $C_1(z)$，$C_2(z)$ を導こう。（10）式を微小区間（t，$t+\tau$）で積分すれば，

$$\Delta z(t) = z(t+\tau) - z(t) = \hat{a}(z)\tau + \int_t^{t+\tau} H(\eta)\,d\eta \qquad (13)$$

係数の意味から

$$C_1(z) = \lim_{\tau\to 0} E(\Delta z)/\tau = \hat{a}(z) + \lim_{\tau\to 0} 1/\tau \int_t^{t+\tau} E\{H(\eta)\}\,d\eta = \hat{a}(z) \qquad (14)$$

かつ（13）式を用いて

$$E(\Delta z)^2 = \int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau} E\{H(\eta)H(\omega)\}\,d\eta\,d\omega = \tau \quad (\because (6)\text{式から})$$

したがって

$$C_2(z)=\lim_{\tau\to 0} E\{(\Delta z)^2\}/\tau=1 \qquad (15)$$

またH(t)の2次以上の相関は全て0であるから

$$n\geqq 3 \text{ に対して } C_n(z)=0 \qquad (16)$$

ここで(14)，(15)，(16)式に注意すると，これらは過程がマルコフ型だとした場合その過程が拡散過程を満足する条件に他ならない。さてここで1つの表現法を定義する。$p(\alpha,\beta;\gamma,\theta)$を次のように解釈する。時刻$\beta$において直径$\alpha$である時それが時刻$\theta$に$\gamma$に遷移する確率と定義するのである。もちろん$\alpha$，$\beta$等は任意の記号で表わすことができるものとする。そうすれば次式が成立することは前述の論義から明らかである。

$$\partial p/\partial t=-\partial/\partial z(\hat{a}(z)p)+1/2\,\partial^2 p/\partial z^2 \qquad (17)$$

(11)式から$z_i=z(x_i)$，$i=1,2,\cdots$とすれば$pr(x_1\leqq x\leqq x_2)=\int_{x_1}^{x_2}p(z,s;x,t)dx=\int_{z_1}^{z_2}p(z,s;x(z),t)\beta(x(z))dz$
$=pr(z_1\leqq z\leqq z_2)=\int_{z_1}^{z_2}p(z_0,s_0;z,t)dz$

これから

$$p(z_0,s_0;z,t)=p(z,s;x(z),t)\beta(x(z)) \qquad (18)$$

ただし$s_0=0$である。

(18)式の両辺をzで微分し，(11)，(12)を適用し整理すれば

$$\partial p/\partial z=\beta\cdot\partial p\cdot\beta/\partial x \qquad (19)$$

$$\partial^2 p/\partial z^2=\beta\cdot\partial/\partial x(\partial p/\partial z) \qquad (20)$$

(12)，(18)，(19)，(20)を(17)に代入し整理すれば

$$\partial p/\partial t=-\partial/\partial x(a(x)p)+1/2\,\partial^2/\partial x^2(b(x)p) \qquad (21)$$

ここに $a(x)=\alpha(x)-1/2\,\partial/\partial x\{\beta(x)\}^2$

$$b(x)=1/2\{\beta(x)\}^2 \qquad (22)$$

(21)式はコルモゴロフの前向き拡散方程式でありこの係数の定義より$a(x)=C_1(x)$，$b(x)=C_2(x)$となる。以上の論議から林分遷移の基礎方程式を解析するための係数は，林木の直径生長が確率的力学方程式を満足するものと仮定すれば，(22)式で与えられることが一応理論的に証明された。(8)，(9)，(22)式を用いれば$C_1(x)$，$C_2(x)$が具体的に求まる。すなわち$f(x)$，$g(x)$の型を定めれば良い。Yang[7]らは生長曲線として修正ワイブル分布関数が従来の生長曲線よりも良好な結果を与えることを報告している。本報では，$f(x)$，$g(x)$を定める生長曲線の比較として，修正ワイブル分布関数(W)とミッチャーリッヒ曲線(Mi)を採用した。これらは各々次式で与えられる。

$$W: Y_t=M(1-e^{-b^{-1}t^c})$$

$$Mi: Y_t=M(1-e^{-b^{-1}t})$$

ここに M，b，cはパラメーター，tは年令，Y_tは年令tにおける平均直径である。結果の1部を表ー1に示す。ただし現実の資料としては，ミッチャーリッヒ曲線との比較のために，梅村ら[6]が用いた資料を採用した。

3. 考 察

林分遷移の基礎方程式の解析に必要な係数関数，すなわち林木の直径の平均生長率とその分散の増加率を表わす関数を誘導し，具体的にその関数を記述するものとして修正ワイブル分布関数とミッチャーリッヒ曲線とを対比した。表ー1からはどちらを採用すべきかは断定することができないが，推定値の差の標準誤差を算出してみると，各々①の場合0.219，0.272，②の場合0.147，0.165となり，修正ワイブル分布の方が良好な結果を与える。なお拡散方程式の解の挙動は鈴木によって詳細に研究されている。

表ー1 生長曲線式のバイアスの比較

林令		18	20	22	24	26	28
① bias	Mi	0.461	0.087	-0.105	-0.284	0.487	0.309
	W	0.369	-0.048	-0.270	-0.466	0.300	0.132
林令		41	43	45	47	49	51
② bias	Mi	0.070	0.118	-0.108	-0.351	0.211	0.071
	W	0.093	0.116	-0.123	-0.368	0.203	0.070

引用文献

(1) 近藤次郎：数学モデル，p.p. 488，丸善，東京 1976
(2) 西沢正久，他：87回日林論，87～88，1976
(3) 箕輪光博，竹内公男：84回日林講，73～74 1973
(4) 鈴木太七：日林誌，48，436～439，1966
(5) 鈴木太七： 同 ，49，17～19，1967
(6) 梅村武夫，鈴木太七：日林誌，56，195～204 1974
(7) Yang，R.C etal：Can. J. For. Res，Vol 8，No. 4，424～431，1978