CFI推定論とベイジアン推定論の関連性（Ⅲ）

ー重回帰式生長モデルの適用ー

九州大学農学部　野　上　啓一郎

1. はじめに

前報[1]において林分材積を推定するための純推定量と混合推定量について理論的説明を加えた。混合推定量は林分の生長モデルの情報を用いるために純推定量よりも推定精度が一般的に高くなる。本研究では，実際の資料を用いて林分材積推定における両推定量の推定精度を比較した。

2. 資　料

秋田地方スギ人工林の90個のプロット（1 ha）による収穫試験地調査結果である。各プロットはくり返しの調査がなされており，本研究に必要な林分生長モデルのパラメータ推定には不可欠な資料である。

3. 重回帰式生長モデル

混合推定量には林分の生長モデルによる情報を必要とする。多数の生長モデルが存在するが，本研究では次式のような重回帰式の生長モデルをとりあげる。

$$\ell n V_2 = \beta_0 + \beta_1 A_2^{-1} + \beta_2 S + \beta_3 ({}^{A_1}/_{A_2})\ \ell n \beta_1 + \beta_4 (1 - {}^{A_1}/_{A_2}) + \beta_5 (1 - {}^{A_1}/_{A_2})\ S \tag{1}$$

$$\varDelta V = b_0 + b_1 ({}^{1}/_{A}) + b_2 S + b_3 D_i + b_4 D_i^2 + b_5 ({}^{S}/_{A}) + b_6 ({}^{D_i}/_{A}) + b_7 ({}^{D_i^2}/_{A}) + b_8 (S \cdot D_i) + b_9 (S \cdot D_i^2) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

ここに，V_2：生長期間末期でのha当り材積，S：地位指数，A_1，A_2：各々生長期間初期・末期の林令，B_1：生長期間初期でのha当り断面積，$\varDelta A$：ha当り材積純生長量，$D_1 = \sqrt{S/n} / \overline{d}_g$（RothのSpacing figure）（ここにSは林地面積，nは本数，$\overline{d}_g$は断面積平均直径）D_2：生長期間初期のha当り断面積，$D_3 = \ell og\ N = a\ \ell og\ \overline{d}_g + k$（ここにNはha当り本数，$a$，$k$は定数），$D_4$：生長期間初期のha当り材積である。(1)，(2)式についてステップワイズ回帰手法により係数を求めたものが表ー1である。

4. 純推定量（WareとCuniaによるCFI推定量）と混合推定量（ベイジアン推定量）

数式の詳細は前報にゆずり，ここでは両推定量について概略説明する。まず純推定量について述べる。$\overline{X}u$，$\overline{X}m$，$\overline{Y}m$，$\overline{Y}n$ を各々生長期間初期における暫定プロットの平均材積，固定プロットの平均材積，生長期間末期での固定プロットの平均材積，暫定プロットの平均材積とする。また母集団の真の平均材積を各期間においてμ_x，μ_y それら分散をσ_x^2，σ_y^2 共分散をσ_{xy}で表わし，分散・共分散は既知とする。純推定量をマトリック型式で表わすと次の通りである。

$$S = ZD + E \qquad E \sim (O, V) \tag{3}$$

ここに

$$S' = [\overline{X}_u, \overline{X}_m, \overline{Y}_m, \overline{Y}_n], \quad D' = [\mu_x, \mu_y]$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_x^2/u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2/m & \sigma_{xy}/m & 0 \\ 0 & \sigma_{xy}/m & \sigma_y^2/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2/n \end{bmatrix}$$

ここで一般化最小二乗法によりμ_x，μ_yの推定値$\hat{\mu}_x$，$\hat{\mu}_y$は

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \end{bmatrix} = (Z'V^{-1}Z)^{-1}\ Z V^{-1} S \tag{4}$$

その分散は

$$Var[\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y] = (Z'V^{-1}Z)^{-1} \tag{5}$$

次に混合推定量について簡単に説明する。林分の生長モデル，すなわちμ_xとμ_yに次のような関係があるとしよう。

$$\mu_y = h\mu_x + e \quad e \sim (o, \omega) \qquad (6)$$

この情報を用いて一般化最小二乗法により次式がみちびかれる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \end{bmatrix} = (Z'V^{-1}Z + R'R/\omega)^{-1} Z'V^{-1}S \quad (7)$$

$$\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y) = (Z'V^{-1}Z + R'R/\omega)^{-1} \quad (8)$$

ここに $R = [h, -1]$ である。

5. 計 算 例

固定プロット数を10，暫定プロット数を20としよう。ここで $\sigma_x^2 = 13636.22$ $\sigma_y^2 = 22302.24$ $\sigma_{xy} = 17119.96$ は現実資料から既知である。90個のプロットを母集団とみなし，乱数表を用いてプロットを抽出する。すなわち単純無作為抽出法を考える。その結果，計算に必要な統計量は，$\bar{X}_u = 159.57$ ㎥／ha，$\bar{X}_m = 152.36$ ㎥／ha，$\bar{Y}_m = 235.08$ ㎥／ha，$\bar{Y}_n = 275.60$ ㎥／haとなった。(4)，(5)を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 167.46 \\ 255.49 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_x, \hat{U}_y) = \begin{pmatrix} 284.27 & 332.73 \\ 332.73 & 464.92 \end{pmatrix}$$ となる。

次に(7)，(8)を用いて $\hat{\mu}_x$，$\hat{\mu}_y$ を計算するには前述の生長モデルの情報を用いなくてはならない。これによって，h，ω の値を求めると(2)のモデルにおいては $h \fallingdotseq 1.515$，$\omega = 24.148$，(1)のモデルでは $h \fallingdotseq 1.573$，$\omega = 1.141$ となった。ここで(1)の h，ω の値を用いて(7)，(8)を計算すれば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168.24 \\ 264.99 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y) = \begin{pmatrix} 186.59 & 292.39 \\ 292.39 & 459.91 \end{pmatrix}$$

6. 考 察

前節の計算例からわかるように混合推定量の方が推定精度が高い。しかしこの精度に影響を与えるものは生長モデルの精度そのものである。林分の生長モデル自体が受け入れられない場合は，混合推定量を用いるべきではない。本研究では重回帰式の生長モデルを用いたが，他により良いモデルが存在するかもしれない。したがって種々の生長モデルの検討が問題となろう。また推定精度のみではなく，推定の正確さの検討も必要である。

表－1 生長モデルのパラメータの値

独立変数	パラメータ	パラメータの標準誤差
モデル(1)		
A_2	−442.42969	0.0
S	0.01468	0.02542
$(A_1/A_2)\ell n B_1$	1.11306	0.07076
$(1-A_1/A_2)$	90.84375	0.0
$(1-A_1/A_2)S$	0.38857	0.18636
定数	1.19002	—
モデル(2)—(1)の場合（D_1）		
$1/A$	2538.63989	5878.542
S	86.33607	24.851
D_1	−1.61320	0.425
D_1^2	2.87164	7.925
S/A	−309.64526	213.871
D_1^2/A	−4.48080	2.931
$S \cdot D_1$	−3.64412	1.679
$S \cdot D_1^2$	0.09773	0.061
定数	−382.80664	—
モデル(2)－2の場合（D_2）		
$1/A$	2392.83423	1495.286
S	44.85014	16.990
D_2	−1.52334	0.529
D_2^2	0.64666	5.128
S/A	−166.70398	277.941
D_2/A	63.26387	67.724
D_2^2/A	−1.08847	0.993
$S \cdot D_2$	−0.04124	0.448
$S \cdot D_2^2$	0.00256	0.004
定数	−292.80469	—

引用文献

(1) 野上啓一郎，西沢正久：92回 日林論，87～88 1981